**Практическая работа № 18,19**

«Задача замена оборудования»

**Цель работы:** Освоить методы решения задач динамического программирования.

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- работать с пакетами прикладных программ аналитического и численного исследования математических моделей;

знать:

- методы исследования математических моделей разных типов.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

**Задача о замене оборудования**

Замена оборудования – важная экономическая проблема. Задача состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования (станков, производственных зданий и т.п.). Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты, затраты на ремонт и обслуживание, снижаются производительность труда, ликвидная стоимость. Критерием оптимальности являются, как правило, либо прибыль от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию в течение планируемого периода (задача минимизации).

При построении модели задачи принято считать, что решение о замене выносится в начале каждого промежутка эксплуатации (например, в начале года) и что в принципе оборудование можно использовать неограниченно долго.

Основная характеристика оборудования – параметр состояния – его возраст t.

При составлении динамической модели замены процесс замены рассматривают как n-шаговый, разбивая весь период эксплуатации на n шагов. Возможное управление на каждом шаге характеризуется качественными признаками, например Xс (сохранить оборудование), Xз(заменить) и Хр(сделать ремонт).

Рассмотрим конкретный пример.

1. Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после этого продается. В начале каждого года можно принять решение – сохранить оборудование или заменить его новым. Стоимость нового оборудования р0=4000руб1. После t лет эксплуатации (1≤t≤5) оборудование можно продать за g(t)=p02-tруб. (ликвидная стоимость). Затраты на содержание в течение года зависят от возраста t оборудования и равны r(t)=600(t+1). Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования, чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки и заключительной продажи были минимальны.

*Решение.* Способ деления управления на шаги, естественный, по годам, n=5. Параметр состояния – возраст машины – sk-1=t, s0=0 – машина новая в начале 1-го года эксплуатации. Управление на каждом шаге зависит от двух переменных Хс и Хз.

Уравнения состояний зависят от управления:

Sk=

В самом деле, если к k-му шагу sk-1=t, то при сохранении машины (Хk=Xc) через год возраст машины увеличится на 1. Если машина заменяется новой (Хk=Хc), то это означает, что к началу k-го шага ее возраст t=0, а после года эксплуатации t=1, т.е. sk=1.

Показатель эффективности k-го шага:

*fk=(xk,t)=*

k=1, 2, 3, 4.

При  Xс затраты только на эксплуатацию машины возраста t, при Xз машина продается (-4000\*2-t), покупается новая (4000) и эксплуатируется в течение первого года(600), общие затраты равны (-4000\*2-t+4000+600)

Пусть (t) – условные оптимальные затраты на эксплуатацию машины начиная с k-го шага до конца при условии, что к началу k-го шага машина имеет возраст t лет. Запишем для функций (t) уравнения Белмана, заменив задачу максимизации на задачу минимизации:

=min

Величина 4000\* – стоимость машины возраста t лет (по условию машина после 5 лет эксплуатации продается).

=min

k=4, 3, 2, 1.

Из определения функций (t) следует

=(0).

Дадим геометрическое решение этой задачи. На оси абсцисс будем откладывать номер шага k, на оси ординат – возраст t машины. Точка (k-1,t) на плоскости соответствует началу k-го года эксплуатации машины возраста t лет. Перемещение на графике в зависимости от принятого управления на k-м шаге показано на рис.

Состояние начала эксплуатации машины соответствует точке (0;0), конец – точкам (6; t).

Любая траектория, переводящая точку s(k-1; t) из в , состоит из отрезков-шагов, соответствующих годам эксплуатации. Надо выбрать такую траекторию, при которой затраты на эксплуатацию машины окажутся минимальными.

Над каждым отрезком, соединяющим точки (k-1; t) и (k; t+1), запишем соответствующие управлению Xc затраты, найденные из: 600(t+1), а над отрезком, соединяющим точки (k-1; t) и (k; t), запишем затраты, соответствующие управлению Xз, т.е. 4600-4000\*2-t. Таким образом мы разметим все отрезки, соединяющие точки на графике, соответствующие переходам из любого состояния sk-1 в состояние sk. Например, над отрезками, соединяющими точки (k; 2) и (k+1; 3), стоит число 18001, что соответствует затратам на эксплуатацию в течении каждого года машины возраста t=2 года, а над отрезками, соединяющими (k; 2) и (k+1; 1), стоит число 3600 – это сумма в течении года без «затрат» (выручки) за проданную машину возраста t лет. Следует учесть, что 0≤t

Проведем на размеченном графе состояний условную оптимизацию.

**V шаг**. Начальные состояния – точки (4; t), конечные – (5; t). В состояниях (5; t) машина продается, условный оптимальный доход от продажи равен 4000\*2-t, но поскольку целевая функция связана с затратами, то в кружках точек (5; t) поставим величину дохода со знаком минус.

Анализируем, как можно попасть из каждого начального состояния в конечное на V шаге.

*Состояние* (4; 1). Из него можно попасть в состояние затем от продажи 1000, т.е. суммарные затраты равны 200, и в состояние (5; 1\_ с затратами 2600-2000=600. Значит, если к последнему шагу система находилась в точке (4; 1), то следует идти в точку (5; 2) (укажем это направление двойной стрелкой),а неизбежные минимальные затраты, соответствующие этому переходу, равны 200 (поместим эту величину (1)=200 в кружке точки (4;1)).

*Состояние* (4; 2). Из него можно попасть в точку (5; 3) с затратами 1800-500=1600. Выбираем первое управление, отмечаем его двойной стрелкой, а (2)=1300 проставляем в кружке точки (4; 2).

Рассуждая таким же образом для каждой точки предпоследнего шага, мы найдем для любого исхода IV шага оптимальное управления на V шаге, отметим двойной стрелкой. Далее планируем IV шаг, анализируя каждое состояние, в котором может оказаться система в конце III шага с учетом оптимального продолжения до конца процесса, т.е. решаем для всех 0≤t≤4 при k=4 уравнения. Например, если начало IV шаг соответствует состоянию (3; 1), то при управлении Xс система переходит в точку (4; 2), затраты на этом шаге 1200, а суммарные затраты за два последних за два шага равны 2600+200=2800. Выбираем минимальные затраты 2500, ставим их в кружок точки (3; 1), в состояние (4; 2). Так поступаем для каждого состояния (3; t).

Продолжая условную оптимизацию III, II, и I шагов, мы получим такую ситуацию: из каждой точки (состояния) выходит стрелка, указывающая, куда следует перемещаться в данном шаге, если система оказалась в этой точке, а в кружках записаны минимальные затраты на переход из этой точки в конечное состояние. На каждом шаге графически решались уравнения.

После проведения условной оптимизации получим в точке (0; 0) минимальные затраты на эксплуатацию машины в течении 5 лет с последующей продажей: Zmin=11900. Далее строим оптимальную траекторию, перемещаясь из точки s0(0; 0) по двойным стрелкам в . Получаем набор точек:

{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (4; 2), (5; 3)},

Который соответствует оптимальному управлению X\*(Хс, Хс, Хз, Хс, Хс). Оптимальный режим эксплуатации состоит в том, чтобы заменить машину новой в начале 3-го года.

Таким образом, размеченный график (сеть) позволяет наглядно интерпретировать расчетную схему и решить задачу методом ДП.

Как уже отмечалось, модели и вычислительная схема ДП очень гибки в смысле возможностей включения в модель различных модификаций задачи. Например, аналогичная задача может быть рассмотрена для большого числа вариантов управления, «ремонт», «капитальный ремонт» и т.д. можно рассматривать замену оборудования новым с учетом технического прогресса, можно учесть изменения в затратах на эксплуатацию оборудования после его ремонта, в зависимости от года эксплуатации (дороже, дешевле). Все эти факторы можно учитывать вычислительной схемой ДП.

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

1.В задачах найти оптимальное распределение средств между n предприятиями при условии, что прибыль *f*(*x*), полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств *x*. Вложения кратны Δ*х*, а функции *f(x)* заданы таблично.

**1.1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |  |
| *F1(x)* | 5 | 9 | 12 | 14 | 15 | 18 | 20 | 24 | 27 | S0=9 |
| *F2(x)* | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 | N=3 |
| F3(x) | 6 | 10 | 13 | 15 | 16 | 18 | 21 | 22 | 25 | Δx=1 |

**1.2**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |
| F1(x) | 0.2 | 0.9 | 1.0 | 1.2 | 2.0 | S0=5 |
| F2(x) | 1.0 | 1.1 | 1.3 | 1.4 | 1.8 | N=4 |
| F3(x) | 2.1 | 2.5 | 2.9 | 3.9 | 4.9 | ΔX=1 |
| F4(x) | 0 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 4.0 |  |
|  | | | | | | |

**1.3** В условиях задачи 1.1 найти оптимальное распределение средств s=8

* 1. В условиях задачи 1.1 найти оптимальное распределение средств s0=9 между четырьмя предприятиями, если функция прибыли для 4-го предприятия задана следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *F4(x)* | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 15 | 20 | 22 | 24 |

* 1. В условиях задачи 1.2 найти оптимальное распределение средств s0=6 между четырьмя предприятиями.
  2. В условиях 1.3 найти оптимальное распределение средств между 2, 3 и 4-м предприятиями (1-е предприятие исключить).
  3. В задачах 1.8 и 1.9 найти оптимальное распределение ресурсов s0 между двумя отраслями производств I и II в течение n лет, если даны функции доходов *f1(x)* и *f2(x)* для каждой отрасли, функции возврата φ1(х) и φ2(х). По истечению только года все возвращенные средства перераспределяются, доход в производство не вкладывается
  4. S0=40000 ед.; n=4; *f1(x)=*0.4х; *f2(x)=*0.3x φ1(*x*)=0.5x; φ2(*x*)=0.8х.
  5. S0=10000 ед.; n=4; *f1(x)=*0.1х2; *f2(x)=*0.5x φ1(*x*)=0.75x; φ2(*x*)=0.3х.
  6. Решить задачу 1.8 при условии, что в начале каждого года дополнительно поступают средства в размерах Δs=10000.
  7. В задачах 1.12, 1.13 и 1.14 составить математическую модель, записать уравнения Беллмана и решить графически следующие задачи на определение оптимальных сроков замены оборудования. Даны: первоначальная стоимость оборудования р0, его ликвидная стоимость φ(t), стоимость содержания r(t) в течение года оборудования возраста t лет, n – срок эксплуатации, в конце которого оборудование продается. Критерий оптимальности – суммарные затраты на эксплуатацию оборудования в течении n лет с учетом первоначальной покупки и последующей продажи.
  8. P0=8000; φ(t)=p02-t; r(t)=0.1p0(t+1); n=5.
  9. n=5. Стоимость нового оборудования зависит от года покупки pk=5000+500(k-1) (k=1, 2, …, 5); φ(t)=pk2-t; rk(t)=0.1pk(t+1).
  10. P0=8000; n=5, φ(t) и r(t) заданы таблично:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| φ(t) | - | 6000 | 5000 | 3000 | 1000 | 500 |
| r(t) | 600 | 800 | 1100 | 1500 | 2000 | - |

**Контрольные вопросы**

1.В чем суть приципа оптимальности Беллмана.

2.Основные примеры задач динамического программирования.

3.Что означает реккурентность вычислений?